РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ГАЗАХ И ПЛАЗМЕ

© 2014 г. А.И. СИМАКОВ, И.Г. ЛЕБО

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики

Введение

Ранее в [1, 2] было дано описание алгоритма расчета двумерных уравнений конвекции-диффузии и программы “Cooler_2D”. С помощью аналитических решений проведено тестирование этой программы и показано удовлетворительное согласие расчетных и аналитических решении. В настоящей статье представлены предварительные результаты численного решения уравнений конвекции-диффузии в трехмерной геометрии. Получены аналитические решения в случае нулевых значений скорости и для случая специальным образом подобранного поля скоростей. Кроме того, описан алгоритм программы “Cooler_3D”.

Алгоритм решения трехмерных уравнений «конвекции-диффузии».

Уравнение «конвекции-диффузии» в векторной дивергентной форме имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -div(\vec{v}\nabla T) + \nabla\left(\frac{\kappa}{c_V\rho}\nabla T\right) + F \tag{1}$$

где $\vec{v}$ – вектор скорости, к – теплопроводность, c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме, ρ – плотность среды, F – внешний источник, T – температура.

Перед написанием алгоритма решения было проведено обезразмеривание физических величин. Тогда при F=0 уравнение (1) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) + \frac{\partial}{\partial y}(wT)\right) + \chi\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

где $\vec{v} = (u, v, w)$ – компоненты вектора скорости по соответствующим направлениям, $\chi = \frac{\kappa}{C_V\rho}\cdot\frac{t_0}{L_0^2}$ – безразмерный параметр, характеризующий свойства среды. Чтобы обезразмерить уравнение (1) были использованы следующие масштабы величин: по пространству, по температуре, по скорости и по времени (обозначаются L_0, T_0, v_0, $t_0=L_0/v_0$ соответственно).

Для решения уравнения (2) использовалась неявная разностная схема, которая рассчитывалась с помощью прогонок при «расщеплении» по соответствующим направлениям [3]. При этом индекс “*i*” соответствовал направлению вдоль оси *0X*, индекс “*j*” вдоль оси *0Y*, индекс “*k*” –вдоль оси *0Z*. При переходе с нижнего временного слоя на верхний вводилось два вспомогательных подуровня. Таким образом, на верхнем подуровне бралась температура только на том направлении, по которому велась прогонка (нижев выражениях (3) значение на подуровнях помечено одной и двумя «черточками», а искомое значение на следующем временном слое обозначено «крышечкой»). В результате получим следующие выражения для процедуры трехточечной прогонки:

$$\frac{\bar{T}-T}{\tau}=\frac{1}{3}\left(\Lambda_x\bar{T}+\Lambda_y T+\Lambda_z T\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\overline{u_{\iota+\frac{1}{2}}}\overline{T_{\iota+\frac{1}{2}}}-\overline{u_{\iota-\frac{1}{2}}}\overline{T_{\iota-\frac{1}{2}}}}{h_x}+\frac{v_{j+\frac{1}{2}}T_{j+\frac{1}{2}}-v_{j-\frac{1}{2}}T_{j-\frac{1}{2}}}{h_y}+\frac{w_{k+\frac{1}{2}}T_{k+\frac{1}{2}}-w_{k-\frac{1}{2}}T_{k-\frac{1}{2}}}{h_z}\right)$$

$$\frac{\bar{\bar{T}}-\bar{T}}{\tau}=\frac{1}{3}\left(\Lambda_x\bar{T}+\Lambda_y\bar{\bar{T}}+\Lambda_z\bar{T}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\overline{u_{\iota+\frac{1}{2}}}\overline{T_{\iota+\frac{1}{2}}}-\overline{u_{\iota-\frac{1}{2}}}\overline{T_{\iota-\frac{1}{2}}}}{h_x}+\frac{\overline{\overline{v_{\jmath+\frac{1}{2}}}}\overline{\overline{T_{\jmath+\frac{1}{2}}}}-\overline{\overline{v_{\jmath-\frac{1}{2}}}}\overline{\overline{T_{\jmath-\frac{1}{2}}}}}{h_y}+\frac{\overline{w_{k+\frac{1}{2}}}\overline{T_{k+\frac{1}{2}}}-\overline{w_{k-\frac{1}{2}}}\overline{T_{k+\frac{1}{2}}}}{h_z}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\hat{T}-\bar{\bar{T}}}{\tau}=\frac{1}{3}\left(\Lambda_x\bar{\bar{T}}+\Lambda_y\bar{\bar{T}}+\Lambda_z\hat{T}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\overline{\overline{u_{\iota+\frac{1}{2}}}}\overline{\overline{T_{\iota+\frac{1}{2}}}}-\overline{\overline{u_{\iota-\frac{1}{2}}}}\overline{\overline{T_{\iota-\frac{1}{2}}}}}{h_x}+\frac{\overline{\overline{v_{\jmath+\frac{1}{2}}}}\overline{\overline{T_{\jmath+\frac{1}{2}}}}-\overline{\overline{v_{\jmath-\frac{1}{2}}}}\overline{\overline{T_{\jmath-\frac{1}{2}}}}}{h_y}+\frac{\widehat{w_{k+\frac{1}{2}}}\widehat{T_{k+\frac{1}{2}}}-\widehat{w_{k-\frac{1}{2}}}\widehat{T_{k-\frac{1}{2}}}}{h_z}\right)$$

где $\Lambda_x T=\frac{T_{i+1}-2T_i+T_{i-1}}{h_x^2}$, $\Lambda_y T=\frac{T_{j+1}-2T_j+T_{j-1}}{h_y^2}$,$\Lambda_z T=\frac{T_{k+1}-2T_k+T_{k-1}}{h_z^2}$, h – шаг по соответствующему направлению.

Таким образом, на одном временном шаге осуществляется три процедуры прогонки вдоль соответствующих направлений.

Постановка первой тестовой задачи

Аналитическое решение уравнения (2) имеет следующий вид (при условии, что u=v=w=0):

$$T=1+10*\exp(-\lambda t)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \tag{4}$$

В этом случае используются граничные условия первого рода $T\Big|_{\Gamma}=T_0$, где Г – граница области. В нашем случае область – куб с ребром, равным 1 (после обезразмеривания).

Постановка второй тестовой задачи

Условие второй тестовой задачи полностью аналогично предыдущему варианту, однако поле скоростей задано так, чтобы сводить конвекцию в области к нулю:

$$\begin{cases} u=u_0\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L}\cos\frac{\pi z}{L} \\ v=v_0\sin\frac{\pi y}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi z}{L} \\ w=w_0\sin\frac{\pi z}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L} \\ u_0+w_0+v_0=0 \end{cases} \tag{5}$$

При расчетах использовались так же граничные условия первого рода.

Расчеты были выполнены на разностных сетках (26x26x26) и (52x52x52).

Заключение

Разработана трехмерная программа “Cooler-3D”, моделирующая теплоперенос в высокотемпературных газах и плазме. Результаты расчетов показали удовлетворительное согласие с аналитическими решениями. В настоящее время ведется работа по распараллеливанию алгоритма счета и переходу на суперкомпьютер МВС-100К, так как ресурсы ПЭВМ не позволяют использовать большие разностные сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Симаков А.И., Лебо И.Г*. Решение двумерного уравнения конвекции-диффузии применительно к задаче о теплообмене вблизи электронных устройств. // «INTERMATIC – 2013» / Материалы Международной НТК, 2-6 декабря 2013 г. Москва. - М.: МГТУ МИРЭА, 2013, ч. 1, с. 40-43.
2. *Лебо И.Г.*, *Симаков А.И.* Решение уравнения «конвекция-диффузия» для моделирования теплопередачи в высокотемпературных газах и плазме. // Вестник МГТУ МИРЭА. - 2014, №3(4), с. 195-205.
3. *Самарский А.А*. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977, - 656 с.