ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДКИ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕИЗВЕСТНОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

© 2012 г. О.В. ЧЕРНОЯРОВ, М.Ф. РАШИТОВ

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»

В общем виде под разладкой случайного процесса понимается скачкообразное изменение его свойств, происходящее в неизвестный момент времени λ_0 [1]. В настоящей работе задача обнаружения разладки некоторого временного ряда конкретизирована для полосового стационарного высокочастотного гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ с неизвестной ступенчатой интенсивностью (дисперсией). Аналитически такой процесс может быть описан как [2]

$$\xi(t) = [\,\sigma' + (\sigma'' - \sigma')\,\theta(t - \lambda_0)\,]\,\nu(t). \tag{1}$$

Здесь $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t \geq 0$ – функция Хевисайда, σ', σ'' – дисперсии процесса $\xi(t)$ при $t < 0$ и $t \geq 0$ соответственно, а $\nu(t)$ – стационарный центрированный гауссовский случайный процесс, обладающий спектральной плотностью

$$G(\omega) = (\pi/\Omega)\{\,I[(\vartheta - \omega)/\Omega] + I[(\vartheta + \omega)/\Omega]\,\}. \tag{2}$$

В (2) обозначено: ϑ – центральная частота, Ω – ширина полосы частот процесса $\nu(t)$.

Полагаем, что процесс (1) наблюдается на фоне аддитивного гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. В результате наблюдению доступна смесь

$$x(t) = \xi(t) + n(t), \qquad t \in [0, T]. \tag{3}$$

Флуктуации процесса $\xi(t)$ будем считать «быстрыми», так что выполняется условие

$$\mu_{min} = T_{min}\Omega/2\pi >> 1, \tag{4}$$

где $T_{min} = \min(\lambda_0, T - \lambda_0)$. По реализации (3) необходимо обнаружить момент разладки процесса $\xi(t)$ и оценить параметры λ_0, σ', σ''.

При решении задачи обнаружения разладки дисперсии процесса $\xi(t)$ выделим три возможных случая: 1) $\sigma' = \sigma''$, т.е. разладка отсутствует (гипотеза H_0); 2) $\sigma' > \sigma''$ (гипотеза H_1); 3) $\sigma'' > \sigma'$ (гипотеза H_2). С учетом (4) представим исходный процесс $\xi(t)$ (1) при реализации гипотез H_0, H_1, H_2 в виде

$$H_0:\ \xi(t) = \nu_1(t), \qquad H_1:\ \xi(t) = \nu_1(t) + [1 - \theta(t - \lambda_0)]\,\nu_2(t), \qquad H_2:\ \xi(t) = \nu_1(t) + \theta(t - \lambda_0)\,\nu_2(t).$$

Здесь $\nu_i(t)$, $i = 1{,}2$ – стационарные центрированные статистически независимые гауссовские случайные процессы с дисперсиями $\sigma_i^2 = d_{0i}\Omega/2\pi$ и спектральными плотностями $G_i(\omega) = \sigma_i^2\, G(\omega)$, а d_{0i} – интенсивность процесса $\nu_i(t)$. Параметры σ', σ'' и σ_1, σ_2 связаны соотношениями $\sigma' = \sigma'' = \sigma_1$ при гипотезе H_0, $\sigma' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $\sigma'' = \sigma_1$ при гипотезе H_1, $\sigma' = \sigma_1$, $\sigma'' = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ при гипотезе H_2.

Задачу проверки указанных гипотез будем решать с помощью метода максимального правдоподобия. С этой целью на основе результатов работ [3,4] запишем выражения для решающих статистик (логарифмов функционала отношения правдоподобия) при гипотезах H_0, H_1, H_2:

$$H_0: \quad L_0(d_1) = \frac{d_1}{N_0(N_0+d_1)}\int_0^T y^2(t)\,dt - \frac{\Omega T}{2\pi}\ln\left(1+\frac{d_1}{N_0}\right),$$

$$H_1: \quad \begin{aligned} L_1(\lambda,d_1,d_2) &= \frac{d_2}{(N_0+d_1)(N_0+d_1+d_2)}\int_0^\lambda y^2(t)\,dt + \frac{d_1}{N_0(N_0+d_1)}\int_0^T y^2(t)\,dt - \\ &- \frac{\Omega\lambda}{2\pi}\left[\ln\left(1+\frac{d_1+d_2}{N_0}\right) - \ln\left(1+\frac{d_1}{N_0}\right)\right] - \frac{\Omega T}{2\pi}\ln\left(1+\frac{d_1}{N_0}\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

$$H_2: \quad \begin{aligned} L_2(\lambda,d_1,d_2) &= \frac{d_2}{(N_0+d_1)(N_0+d_1+d_2)}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt + \frac{d_1}{N_0(N_0+d_1)}\int_0^T y^2(t)\,dt - \\ &- \frac{\Omega(T-\lambda)}{2\pi}\left[\ln\left(1+\frac{d_1+d_2}{N_0}\right) - \ln\left(1+\frac{d_1}{N_0}\right)\right] - \frac{\Omega T}{2\pi}\ln\left(1+\frac{d_1}{N_0}\right). \end{aligned}$$

Здесь $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h(t-t')\,dt'$ – выходной сигнал фильтра с передаточной функцией $H(\omega)$, удовлетворяющей условию $|H(\omega)|^2 = I[(\vartheta-\omega)/\Omega] + I[(\vartheta+\omega)/\Omega]$, а λ, d_1, d_2 – текущие значения параметров λ_0, d_{01}, d_{02} соответственно. Выбор осуществляется в пользу той из гипотез, для которой значение абсолютного максимума решающей статистики является наибольшим.

При неизвестных параметрах λ_0, d_{01}, d_{02} максимизацию функционалов (5) по переменным d_1, d_2 можно выполнить аналитически. В результате имеем

$$L_{0\max} = \max_{d_1} L_0(d_1) = \frac{\Omega T}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{N_0\Omega T}\int_0^T y^2(t)\,dt - \ln\left(\frac{2\pi}{N_0\Omega T}\int_0^T y^2(t)\,dt\right) - 1\right],$$

$$L_{1\max}(\lambda) = \max_{d_1,d_2} L_1(\lambda,d_1,d_2) = L_{0\max} + \frac{\Omega T}{2\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt}{\frac{1}{T-\lambda}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt}\right] - \frac{\Omega\lambda}{2\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda y^2(t)\,dt}{\frac{1}{T-\lambda}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt}\right], \qquad (6)$$

$$L_{2\max}(\lambda) = \max_{d_1,d_2} L_2(\lambda,d_1,d_2) = L_{0\max} + \frac{\Omega T}{2\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt}{\frac{1}{T-\lambda}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt}\right] - \frac{\Omega\lambda}{2\pi}\ln\left[\frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda y^2(t)\,dt}{\frac{1}{T-\lambda}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt}\right].$$

Из (6) следует, что максимально-правдоподобный алгоритм обнаружения разладки гауссовского случайного процесса с неизвестной интенсивностью имеет вид

$$\max_\lambda\left\{\ln\left[\frac{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt}{\frac{1}{T-\lambda}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt}\right] - \frac{\lambda}{T}\ln\left[\frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda y^2(t)\,dt}{\frac{1}{T-\lambda}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt}\right]\right\} \underset{H_0}{\overset{H_1 \text{ или } H_2}{\gtrless}} 0 \qquad (7)$$

и является инвариантным к спектральной плотности белого шума и направлению изменения (увеличению или уменьшению) значения дисперсии случайного процесса. Заметим, что вместо алгоритма (7) можно использовать обобщенный алгоритм обнаружения [5], основанный на сравнении наибольшего максимума функционала (7) с некоторым (в общем случае ненулевым) порогом *c*, определяемым заданным критерием оптимальности.

На Рис. 1 штриховой линией выделена структурная схема максимально-правдоподобного обнаружителя разладки гауссовского случайного процесса с неизвестной интенсивностью. Здесь обозначено: 1 – ключ, открывающийся на время $[0,T]$, 2 – фильтр с передаточной функцией $H(\omega)/\sqrt{T}$, 3 – квадратор, 4 – интегратор, 5 – линия задержки на время T, 6 – вычитающее устройство, 7 – генератор линейно изменяющегося напряжения λ/T, 8 – делитель, 9 – логарифмический усилитель, 10 – умножитель, 11 – пиковый детектор, 12 – пороговое устройство, осуществляющее сравнение выходного сигнала пикового детектора с порогом *c* и выносящее решение о наличии разладки гауссовского случайного процесса на интервале $[0,T]$, если порог превышен, либо решение об отсутствии разладки, если порог не превышен.

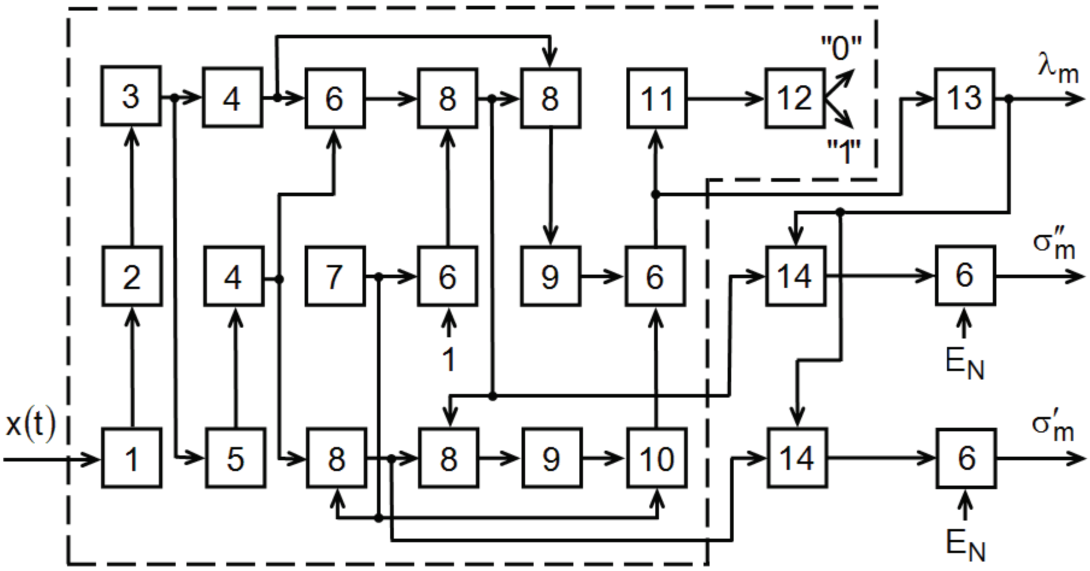

Рис. 1. Структурная схема обнаружителя/измерителя разладки дисперсии гауссовского случайного процесса.

Положим теперь, что разладка дисперсии случайного процесса $\xi(t)$ присутствует на интервале $[0,T]$ с вероятностью 1. При этом необходимо измерить момент разладки λ_0 и дисперсии σ', σ'' процесса $\xi(t)$ до и после разладки. Используя (5), для оценок максимального правдоподобия λ_m, σ'_m, σ''_m параметров λ_0, σ', σ'' имеем:

$$\lambda_m = \arg\max_{\lambda}\left\{\ln\left[\frac{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)\,dt}{\frac{1}{T-\lambda}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt}\right] - \frac{\lambda}{T}\ln\left[\frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda y^2(t)\,dt}{\frac{1}{T-\lambda}\int_\lambda^T y^2(t)\,dt}\right]\right\},$$

$$\sigma'_m = \frac{1}{\lambda_m}\int_0^{\lambda_m} y^2(t)\,dt, \qquad \sigma''_m = \frac{1}{T-\lambda_m}\int_{\lambda_m}^T y^2(t)\,dt. \tag{8}$$

Измеритель (8) можно реализовать в виде структурной схемы, показанной на Рис. 1, откуда нужно исключить пиковый детектор 11 и пороговое устройство 12. Остальные обозначения: 13 – устройство поиска положения наибольшего максимума входного сигнала, 14 – стробирующее устройство, формирующее выходе отсчет входного сигнала в момент времени λ_m, $E_N = N_0\Omega/2\pi$ – средняя мощность белого шума $n(t)$ в полосе частот анализируемого процесса $\xi(t)$.

Для определения качества функционирования синтезированных алгоритмов обнаружения (7) и оценивания (8) с помощью метода локально-марковской аппроксимации [3] были найдены асимптотически точные (с ростом μ_{min} (4)) выражения для их характеристик – вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода (для алгоритма (7)) и условных смещений и рассеяний оценок (для алгоритма (8)).

Экспериментальная проверка эффективности обнаружителя (7) и измерителя (8) осуществлялась методами статистического моделирования на ЭВМ. В результате было установлено, что обнаружитель (7) и измеритель (8) являются работоспособными, а теоретические формулы для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода и условных смещений и рассеяний выносимых оценок удовлетворительно согласуются с соответствующими экспериментальными данными в широком диапазоне значений параметров процесса $\xi(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках
научного проекта № 12-01-33040 мол_а_вед.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жиглявский А.А., Красковский А.Е.* Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники. – Л.: ЛГУ, 1988, 224 с.
2. *Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И.* Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. – Воронеж: ВГУ, 1991, 246 с.
3. *Чернояров О.В.* Статистический анализ случайных импульсных сигналов на фоне белой и коррелированной помех с неизвестными интенсивностями // Инфокоммуникационные системы и технологии: проблемы и перспективы / Под ред. А.В. Бабкина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007, с. 185-247.
4. *Трифонов А.П., Чернояров О.В., Шепелев Д.Н.* Оценка дисперсии случайного радиоимпульса с неизвестным временем прихода при наличии помехи с неизвестной интенсивностью // Радиотехника, 2009, № 4, с. 16-22.
5. Теория обнаружения сигналов / *П.С. Акимов, П.А. Бакут, В.А. Богданович и др.*; Под ред. *П.А. Бакута*. – М.: Радио и связь, 1984, 440 с.